

Mat-1.401 Peruskurssi L1

Tentti 01.09.2003

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. ★-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Kokeessa saa käyttää funktiolaskinta, ei muita apuvälineitä.

1. Olkoon $\{a_n\}$ reaalilukujen jono ja $b \in \mathbb{R}$. Käyttäen lukujonon suppenemisen määritelmää, näytä todeksi väittämä $a_n \leq b \forall n \ \& \ a_n \rightarrow a \Rightarrow a \leq b$. Onko väittämä tosi myös jos epäyhtälöiden ' \leq ' tilalla on '<'? Perustelee!
2. Lähtien trigonometrian kaavoista $\cos 2x = \dots$, $\sin 2x = \dots$
a) Lausu $\cos 4x \cos x$:n avulla. b) Lausu $\tan \frac{1}{2}x \cos x$:n ja $\sin x$:n avulla.
3. Matriisit **A** ja **B** ovat kokoa 4×4 . Kertoessaan vasemmalta yleistä 4×4 matriisia **C**, **A** vaihtaa **C**:n 1. ja 2. rivit keskenään ja **B** vaihtaa 1. ja 4. rivit keskenään. Määritä matriisit **A**, **B**, **ABC** ja **BAC**, kun $\mathbf{C} = (c_{ij}) = (i - j)$.
4. Luonnehdi seuraavien kiintopisteiteraatioiden asymptoottinen suppeneminen, sikäli kuin suppeneminen on mahdollista rationaalisesta alkuarvosta x_0 . Muussa tapauksessa perustelee iteraation hajaantumisen.

$$\text{a) } x_n = \sqrt{1 + 4x_{n-1}}, \ n = 1, 2, \dots \quad \text{b) } x_n = (1 - x_{n-1})^2, \ n = 1, 2, \dots$$

$$\text{c) } x_n = \frac{x_{n-1}^2 + 8}{2x_{n-1}} \ n = 1, 2, \dots$$

5. Määritä funktion $f(z) = 2 - \cos z$ nollakohdat kompleksitasossa.

1. Låt $\{a_n\}$ vara en reel talföljd och $b \in \mathbb{R}$. Visa med hjälp av definitionen av talföljders konvergens att påståendet $a_n \leq b \forall n \ \& \ a_n \rightarrow a \Rightarrow a \leq b$ är sant. Är påståendet sant även om olikheterna ' \leq ' ersätts med '<'? Motivera!
2. Utgående från de trigonometriska formlerna $\cos 2x = \dots$, $\sin 2x = \dots$
a) uttryck $\cos 4x$ med hjälp av $\cos x$:n avulla. b) uttryck $\tan \frac{1}{2}x$ med hjälp av $\cos x$ ja $\sin x$.
3. Matriserna **A** och **B** är av typ 4×4 . Om man multiplicerar en godtycklig 4×4 -matris **C** från vänster med **A**, så byter raderna 1 och 2 i **C** plats, medan om man multiplicerar **C** från vänster med **B**, så byter raderna 1 och 4 plats. Bestäm matriserna **A**, **B**, **ABC** och **BAC**, då $\mathbf{C} = (c_{ij}) = (i - j)$.
4. Karaktärisera den asymptotiska konvergens hos följande fixpunktsiterationer, i fall att konvergens är möjlig för rationella begynnelsevärden x_0 . I annat fall motivera iterationens divergens.

$$\text{a) } x_n = \sqrt{1 + 4x_{n-1}}, \ n = 1, 2, \dots \quad \text{b) } x_n = (1 - x_{n-1})^2, \ n = 1, 2, \dots$$

$$\text{c) } x_n = \frac{x_{n-1}^2 + 8}{2x_{n-1}} \ n = 1, 2, \dots$$

5. Bestäm nollställena till funktionen $f(z) = 2 - \cos z$ i det komplexa talplanet.