

Mat-1.401 Peruskurssi L1

Välikoe 3 11.12.03

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. ★-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Kokeessa saa käyttää funktiolaskinta, ei muita apuvälineitä.

1. Millä a :n arvoilla funktio

$$f(x) = \begin{cases} x + a & , \quad x \leq a \\ \sqrt{|x|} & , \quad x > a \end{cases}$$

on a) jatkuva, b) Lipschitz-jatkuva välillä $[-1,1]$?

2. Tutki, miten kiintopisteiteraatio $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, \dots$ suppenee tai hajaantuu asymptoottisesti, kun x_0 on lähellä kiintopistettä ja

$$\text{a) } f(x) = \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x} \quad \text{b) } f(x) = \sqrt[3]{x+6} \quad \text{c) } f(x) = \frac{x+1}{e^x+1}$$

3. a) Miten määritellään kompleksifunktiot $\sin z$, $\cos z$ ja $\cosh z$ ($z = x + iy \in \mathbb{C}$)?

b) Etsi yhtälön $\cosh z = -1$ kaikki ratkaisut kompleksitasosta.

4. a) Funktio f on mielivaltaisen monta kertaa derivoituva välillä $(-1, \infty)$ ja muualla kuin origossa pätee $f(x) = \frac{1}{x} \ln(1+x) + x/2$, $x \in (-1, \infty)$, $x \neq 0$. Määritä f :n kolmannen asteen Taylorin polynomi $T_3(x, 0)$. Onko f :llä paikallista minimiä tai maksimia origossa?

b) Arvioi kahden merkitsevän numeron tarkkuudella luku $e - (1 + \frac{1}{n})^n$ kun $n = 10^{30}$ (e =Neperin luku).

1. För vilka värden på a är funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x + a & , \quad x \leq a \\ \sqrt{|x|} & , \quad x > a \end{cases}$$

a) kontinuerlig, b) Lipschitz-kontinuerlig i intervallet $[-1,1]$?

2. Undersök hur fixpunktsiterationen $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, \dots$ konvergerar eller divergerar asymptotiskt, då x_0 är nära fixpunkten och

$$\text{a) } f(x) = \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x} \quad \text{b) } f(x) = \sqrt[3]{x+6} \quad \text{c) } f(x) = \frac{x+1}{e^x+1}$$

3. a) Hur definieras de komplexa funktionerna $\sin z$, $\cos z$ och $\cosh z$ ($z = x + iy \in \mathbb{C}$)?

b) Bestäm alla lösningarna till ekvationen $\cosh z = -1$ i komplexa talplanet.

4. a) Funktionen f är godtyckligt många gånger deriverbar i intervallet $(-1, \infty)$ och borta från origo gäller att $f(x) = \frac{1}{x} \ln(1+x) + x/2$, $x \in (-1, \infty)$, $x \neq 0$. Bestäm f :s Taylorpolynom $T_3(x, 0)$ av tredje graden. Har f lokalt minimum eller maximum i origo?

b) Beräkna talet $e - (1 + \frac{1}{n})^n$ med två gällande siffrors noggrannhet, då $n = 10^{30}$ (e =Nepers tal).