

Mat-1.401 Peruskurssi L1

Tentti 19.01.2004

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa saa käyttää funktiolaskinta, ei muita apuvälineitä.

1. Tarkastellaan palautuvaa rationaalilukujonoa

$$a_0 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

- a) Jonolle $\{a_n\}$ pätee $a_n > 2 \forall n$. Näytä tämän tiedon perusteella induktiolla, että $a_n < 5/2 \forall n \geq 1$.
 - b) Jono $\{a_n\}$ on itse asiassa vähenevä. Mitä tämän tiedon perusteella voidaan sanoa jonon suppenevuudesta ja mahdollisesta raja-arvosta?
2. Reaalimuuttujan funktiolle f pätee $f(x) = f(x+2) \forall x \in \mathbb{R}$ ja $f(x) = x(2-x)$, kun $x \in [0, 2]$. Millä a :n arvoilla suoralla $y = ax$ ja käyrällä $y = f(x)$ on täsmälleen kolme yhteistä pistettä?
 3. Parametrinen avaruuskäyrä $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + (t^2 - 8)\vec{j} + t^2\vec{k}$ leikkaa origon kautta kulkevan avaruustason $T : ax + by + cz = 0$ kohtisuorasti (eli käyrän tangentti = T :n normaali leikkauspisteessä). Montako tällaista tasoa on ja mitkä ovat näiden yhtälöt mainitussa normaalimuodossa?
 4. Määritä funktion $f(x) = |x-1| - |\cos 2x|$ paikalliset ääriarvokohdat välillä $(0,2)$ ja maksimi- ja minimikohdat ja -arvot välillä $[0,2]$.
 5. Käyttäen Taylorin lausetta, laske $(100001)^{1/5} = 10(1 + 10^{-5})^{1/5}$ viidentoista (15) merkitsevän numeron tarkkuudella.

Mat-1.401 Peruskurssi L1

Tentti 19.01.2004

Fyll i tydligt på varje svarpapper samtliga uppgifter. På förhörskod och -namn skriv kursens kod, namn samt slutförhör eller mellanförhör med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Funktionsräknare är tillåten

1. Vi undersök den rekursiva rationella talföljen

$$a_0 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

- a) För talföljden $\{a_n\}$ gäller att $a_n > 2, \forall n$. Visa på base av den informationen med hjälp av induktion, att $a_n < 5/2, \forall n \geq 1$.
 - b) Talföljden $\{a_n\}$ är i själva verket avtagande. Vad kan man på basen av den informationen säga om talföljdens konvergens och eventuella gränsvärde?
2. För funktionen f av en reell variabel gäller $f(x) = f(x+2), \forall x \in \mathbb{R}$ och $f(x) = x(2-x)$, då $x \in [0, 2]$. För vilka värden på a har linjen $y = ax$ och kurvan $y = f(x)$ exakt tre gemensamma punkter?
 3. Den parametriserade rymdkurvan $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + (t^2 - 8)\vec{j} + t^2\vec{k}$ skär planet $T : ax + by + cz = 0$, som går genom origo, vinkelrätt (dvs. kurvans tangent = T :s normal i skärningspunkten). Hur många sådana plan finns det och vilka är deras ekvationer på den nämnda normalformen?
 4. Bestäm funktionens $f(x) = |x - 1| - |\cos 2x|$ lokala extrempunkter i intervallet $(0, 2)$ och maximi- och minimipunkterna samt $-$ värdena i intervallet $[0, 2]$.
 5. Beräkna $(100001)^{1/5} = 10(1 + 10^{-5})^{1/5}$ med femton (15) signifikanta siffrors noggrannhet genom att använda Taylors sats.