

## Mat-1.402 Peruskurssi L2

### Välikoe 3 26.4.2004

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa saa käyttää funktiolaskinta, ei muita apuvälineitä.

- Selvitä neliömuotojen teorian avulla, millä  $a$ :n arvoilla funktiolla

$$f(x, y, z) = a \sin(x^2 + y^2 + z^2) + \cos(x + y) + \cos(x - z) - \frac{1}{2}(y^2 + z^2)$$

on origossa paikallinen minimi.

- Päättymätön pullapitko on joukko

$$A = \{(x, y, z) \mid x \geq 0 \text{ cm} \ \& \ z \geq 0 \text{ cm} \ \& \ y^2 + z^2 \leq R^2(4 + \sin \frac{x}{a})\},$$

missä  $R = 4$  cm ja  $a = 1$  cm. Rusinatiheys pullapitkossa on  $\rho(x, y, z) = ce^{-x/b}$ ,  $(x, y, z) \in A$ , missä  $c = 1/\text{cm}^3$  ja  $b = 50$  cm.

a) Määritellään yksiulotteinen rusinamitta  $\mu$ , siten että rusinoiden lukumäärä pitkossa välillä  $x \in [x_1, x_2]$  ( $0 \leq x_1 \leq x_2$ ) on

$$m = \int_{x_1}^{x_2} d\mu = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

Määritä tiheysfunktio  $f(x)$ .

b) Montako rusinaa (lähimpään kokonaislukuun pyöristettynä) pitkossa on kaikkiaan?

Kaava-apu:  $\int e^{x/b} \sin \frac{x}{a} dx = \frac{ab}{a^2+b^2} e^{x/b} (a \sin \frac{x}{a} - b \cos \frac{x}{a}) + C$

- Kappaleen massa on jakautunut tasaisesti ohueksi kerrokseksi  $R$ -säteisen pallon pinnalle, siten että kokonaismassa  $=m$ . Laske kappaleen hitausmomentti pallon keskipisteen kautta kulkevan suoran suhteen.
- Laske vektorikentän

$$\vec{F}(x, y, z) = (x + e^{x^2})\vec{i} - yz^2\vec{j} - (xe^{y^2} + z)\vec{k}$$

vuo kuution  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$  reunapinnan  $\partial V$  läpi.

**Mat-1.402 Peruskurssi L2**

## Välikoe 3 26.4.2004

Fyll i tydligt på varje svarspapper samtliga uppgifter. På förhörskod och -namn skriv kursens kod, namn samt slutförhör eller mellanförhör med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Funktionsräknare är tillåten.

1. Avgör med hjälp av teorin för kvadratiska former för vilka värden på  $a$  funktionen

$$f(x, y, z) = a \sin(x^2 + y^2 + z^2) + \cos(x + y) + \cos(x - z) - \frac{1}{2}(y^2 + z^2)$$

har ett lokalt minimum i origo.

2. En obegränsad vetebrödslängd är mängden

$$A = \{(x, y, z) \mid x \geq 0 \text{ cm} \ \& \ z \geq 0 \text{ cm} \ \& \ y^2 + z^2 \leq R^2(4 + \sin \frac{x}{a})\},$$

där  $R = 4$  cm och  $a = 1$  cm. Russintätheten i vetebrödslängden ges av  $\rho(x, y, z) = ce^{-x/b}$ ,  $(x, y, z) \in A$ , där  $c = 1/\text{cm}^3$  och  $b = 50$  cm.

a) Vi definierar ett 1-dimensionellt russinmått  $\mu$  så att russinens antal i vetebrödslängden i intervallet  $x \in [x_1, x_2]$  ( $0 \leq x_1 \leq x_2$ ) är

$$m = \int_{x_1}^{x_2} d\mu = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx.$$

Bestäm täthetsfunktionen  $f(x)$ .

b) Hur många russin finns det totalt i vetebrödslängden (avrundet till närmaste heltal)?

Formel-hjälp:  $\int e^{x/b} \sin \frac{x}{a} dx = \frac{ab}{a^2 + b^2} e^{x/b} (a \sin \frac{x}{a} - b \cos \frac{x}{a}) + C$

3. Massan hos en kropp är jämnt fördelad i ett tunnt skikt på ytan av en sfär med radien  $R$ , så att totala massan är  $m$ . Beräkna kroppens tröghetsmoment med avseende på en linje genom sfärens mittpunkt.
4. Beräkna flödet av vektorfältet

$$\vec{F}(x, y, z) = (x + e^{x^2})\vec{i} - yz^2\vec{j} - (xe^{y^2} + z)\vec{k}$$

genom randytan  $\partial V$  till kuben  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$ .