

**Välikoe 3.** 11.12.2003 klo 9-12

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

**Vain funktiolaskimet ovat sallittuja!** Vastauksiksi riittävät tarkat arvot.

1. Laske integraalit

$$\text{a) } \int_0^2 \frac{x}{(x+1)(x-3)} dx \quad \text{ja} \quad \text{b) } \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}.$$

Vihje b): Sijoitus  $x = u^2$ .

2. a) Onko olemassa sellaista jatkuvasti derivoituvaa funktiota
- $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$
- , että

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

kaikilla  $x$ ?b) Käyrä  $y = \ln x$ ,  $1 \leq x \leq 2$ , pyörrähtää  $x$ -akselin ympäri. Laske näin saadun pyörrähdyskappaleen tilavuus. Vihje: Osittaisintegrointi.

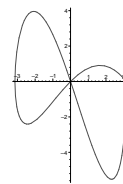
3. a) Selitä ns. trapetsisäännössä
- $\int_a^b f(t) dt \approx T_n = h(y_0/2 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + y_n/2)$
- esiintyvät merkinnät ja perustele, kuinka lauseke saadaan yhtä askelväliä vastaavasta approksimaatiosta.

b) Eräänä päivänä ilman lämpötila  $f(t)$  hetkellä  $t$  mitattiin kahden tunnin välein (al-kaen keskiyöstä), jolloin tulokseksi saatiin arvot 10, 10, 12, 14, 16, 18, 21, 20, 19, 18, 16, 16, 14 astetta. Arvioi kyseisen vuorokauden keskilämpötilaa

$$\frac{1}{24} \int_0^{24} f(t) dt.$$

4. a) Eräs tasokäyrä on parametrisoitu muodossa

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (\pi \cos t, t \sin(2t)), \text{ missä } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Käyrä leikkaa itsensä origossa (parametrin arvoilla  $t = \pi/2$  ja  $t = 3\pi/2$ ). Kuinka suuri on tangenttivektoreiden  $\mathbf{r}'(\pi/2)$  ja  $\mathbf{r}'(3\pi/2)$  välinen kulma?

- b) Tarkastellaan tasokäyrää
- $y = f(x)$
- , missä
- $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$
- on kaksi kertaa derivoituvaa.

(i) Mikä on käyrän  $y = f(x)$  kaarevuus funktion  $f$  paikallisessa ääriarvokohdassa?(ii) Mikä yhteys on käyrän  $y = f(x)$  käännepeisteillä ja sen kaarevuudella?**Lisätieto:** Parametrisoidun käyrän  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$  kaarevuus on muotoa

$$K = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|^3}.$$