Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Alestalo/Turunen

Mat-1.1410 Matematiikan peruskurssi P1

Tentti ja uusintavälikokeet 13.1.2006

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa saa käyttää funktiolaskinta, ei muita apuvälineitä. Koeaika on 4 tuntia.

Huom! Tentti: tehtävät 1, 4, 6, 8, 9.
1. välikoe: tehtävät 1, 2, 3.
2. välikoe: tehtävät 4, 5, 6.
3. välikoe: tehtävät 7, 8, 9.

1. a) Vektorista $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ tiedetään, että $\mathbf{a} \times \mathbf{i} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ja $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{i} - \mathbf{k}) = 4$. Määritä kertoimet $x, y, z \in \mathbf{R}$.
   b) Olkoot $\mathbf{n}, \mathbf{r}_0 \in \mathbf{R}^3$ annettu, $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$. Taso $T \subset \mathbf{R}^3$ koostukoon vektoreista $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^3$, joille $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$. Olkoot $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3 \in T$. Millä (lukuja $a, b, c \in \mathbf{R}$ koskevalla mahdollisimman yleisellä) ehdolla vektori $\mathbf{r} = a\mathbf{r}_1 + b\mathbf{r}_2 + c\mathbf{r}_3 \in T$?

2. Määritä sellaiset kertoimet $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, että
$$a(x^3 - x^2 + x - 1) + b(x^3 + x^2 + 3x - 2) + c(x^2 + 3x + 1) + d(x^3 + 2x^2 - 2) + 7$$
   on nolla kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

3. Laske
$$\text{a)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9n^6 + 3n^3 + n}}{6n^3 + \sqrt{n+1}}, \qquad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n+1}}, \qquad \text{c)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$
   Vihje c-kohtaan: Muodosta yleisen termin osamurtohajotelma ja tutki sen avulla sarjan osasummia.

4. Tutki, millä $x \in \mathbf{R}$ seuraavat sarjat suppenevat:
$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n} x^{2n}, \qquad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n.$$

5. a) Funktio $\sinh : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ määritellään
$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$
   Osoita, että sinh on aidosti kasvava ja lausu sen käänteisfunktio logaritmin avulla.
   b) Selitä, miten yhtälö $f(x) = x$ ratkaistaan iteroimalla. Miten f' liittyy kiintopisteiteraation suppenemiseen?

Tehtävät 6-9 toisella puolen paperia!

6. Olipa kerran valtio, joka yksinoikeudella myi Matille taikajuomaa litrahintaan $x > 0$ euroa. Sankarilliset virkamiehet havaitsivat silloin Matin nauttivan $\mathrm{e}^{-x^2/2}$ litraa. Mutta Matin juodessa z litraa koitui valtiolle menoja $z/\sqrt{-\ln(z^2)}$ euroa. Kirjoita lauseke valtion taikajuomamyynnin voitolle (*voitto* = *tulot* − *menot*) ja laske, mikä litrahinta tuo valtiolle suurimman voiton.

7. a) Tarkista, että piste $(x_0, y_0) = (1, 1)$ on käyrällä $(2 - x)y^2 = x^3$. Laske tangenttisuoran yhtälö tässä pisteessä.
b) Olkoon $f(0) = 1$ ja $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, kun $x \neq 0$. Laske $f'(0)$.

8. a) Tiedetään, että $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on jatkuva ja että $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ kaikilla $a, b \in \mathbf{R}$. Mitä voidaan sanoa funktion f arvoista $f(x)$?
b) Laske

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} \sin(2x)\,\mathrm{d}x.$$

9. a) Laske sopivan sijoituksen avulla

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

b) Laske osamurtokehitelmää käyttäen

$$\int \frac{4}{x^4 - 1}\,\mathrm{d}x.$$

Tehtävät 1-5 toisella puolen paperia!