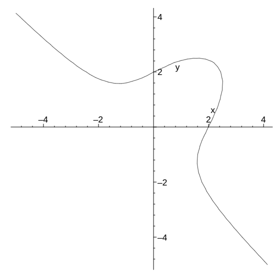
Teknillinen korkeakoulu
Mat-1.442 Matematiikan peruskurssi P2, kevät 2003 Alestalo/Astola

Välikoe 3. 5.5.2003 klo 16-19
Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.
Vain funktiolaskimet ovat sallittuja!

1. Osoita, että käyrä $x^3 - 3xy + y^3 = 8$ leikkaa y-akselin täsmälleen yhdessä pisteessä ja määritä tähän pisteeseen piirretyn tangentin yhtälö.



2. Määritä funktion $f(x, y) = 2x^3 + 3x^2 + 2y^3$ suurin ja pienin arvo ehdolla $x^2 + y^2 = 1$.

3. a) Olkoot $a > 0$ ja $b > 0$ vakioita. Osoita, että venytetyn napakoordinaattimuunnoksen $x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta$ Jacobin determinantti $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ on muotoa abr. Tässä $0 \le r \le 1$ ja $0 \le \theta < 2\pi$.
   b) Laske (esim. a-kohdan avulla) ellipsin puolikkaan $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2/a^2 + y^2/b^2 \le 1,\ y \ge 0\}$ pinta-ala A ja sen keskiön y-koordinaatti
$$\bar{y} = \frac{1}{A}\iint_D y\, dA.$$

4. a) Laske kappaleen $K = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le \sqrt{y},\ 0 \le x \le z\}$ tilavuus.
   b) Johda R-säteisen pallon h-korkuisen kalotin pinta-alan lauseke $A = 2\pi Rh$; integroi pallokoordinaatiston kulmien avulla. (Merkinnät liittyvät alla olevaan **poikkileikkauskuvioon**. Pinta-alan suurennussuhdetta ei tarvitse johtaa.)