

Tentti 10.1.2005.

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Vain funktiolaskimet ovat sallittuja!

1. Millä muuttujan x arvoilla sarja

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{x/n}}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{1+nx}}, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n+x}}$$

suppenee ja mikä on tällöin sen summa?

2. Määritä raja-arvo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \ln(1 + x^3)}{(e^{-x} + x - 1)^3}$.

3. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y'' + 3y' = \sqrt{3}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

4. Määritä funktion $f(x, y) = x^3 - 3xy + y$ paikalliset ääriarvokohdat ja niiden tyyppi.

5. a) Määritä puoliympyrän $\{(x, y) \mid x \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}$ painopiste (\bar{x}, \bar{y}) .

b) Laske viivaintegraali

$$\int_C xy \, dx - x \, dy,$$

kun käyrä C kulkee pisteestä $(1, 1)$ pisteeseen $(2, 4)$ pitkin käyrää $y = x^2$.

Huom: Grossmanin kirjan merkinnöillä laskettavana on

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}, \quad \text{missä } \mathbf{f}(x, y) = xy\mathbf{i} - x\mathbf{j}.$$