Teknillinen korkeakoulu Alestalo/Koljonen/Kaila
Matematiikka

Mat-1.442 Matematiikan peruskurssi P2

3. välikoe 25.4.2005

1. Määritä funktion $f(x, y) = \sin(x+2y)$ suurin ja pienin arvo ellipsillä $12x^2+24y^2 = 1$.

2. Määritä
   a) tasoalueen $D = \{(x, y) \mid 0 \le y \le \sin x,\ 0 \le x \le \pi\}$ keskiö $(\bar{x}, \bar{y})$.
   b) kappaleen $K = \{(x, y, z) \mid 0 \le z \le (1 - x^2)(1 - y^2), -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$ keskiö $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.
   Huom: Symmetriaominaisuuksia **saa** käyttää. Kaavat: katso tehtävä 4b.

3. R-säteisen pallon B tiheys t kasvaa lineaarisesti pallokoordinaatin ρ suhteen arvosta 1 (kun $\rho = 0$) arvoon 2 (kun $\rho = R$), eli muodossa
   $$t(\rho) = 1 + \frac{\rho}{R}.$$
   Laske pallon tilavuus V ja keskitiheys
   $$\bar{t} = \frac{1}{V} \iiint_B t\ dV.$$

4. Greenin kaavan mukaan viiva- ja tasointegraalin välillä on yhteys
   $$\oint_{\partial M} f_1\ dx + f_2\ dy = \iint_M \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dA.$$
   a) (1 p.) Selitä kaavan avulla, miksi tason monikulmion M pinta-ala voidaan laskea reunaa pitkin viivaintegraalina
   $$A = \oint_{\partial M} x\ dy.$$
   b) (2 p.) Myös monikulmion keskiö voidaan laskea viivaintegraalien avulla. Päättele Greenin kaavan avulla, miten tarvittavat integraalit
   $$\bar{x} \cdot A = \iint_M x\ dA \quad \text{ja} \quad \bar{y} \cdot A = \iint_M y\ dA$$
   saadaan viivaintegraaleina. (Molempiin riittää yksi toimiva lauseke)
   c) (3 p.) Johda yhtä monikulmion sivua C vastaava kaava
   $$\int_C x\ dy = \frac{1}{2}(x_0 + x_1)(y_1 - y_0).$$
   Tässä käyrä C on pisteiden (x_0, y_0) ja (x_1, y_1) yhdysjana.

Seuraava tentti järjestetään 17.5. Jos haluat yrittää korottaa jonkin välikokeen pistemäärää (max 18 p.) tentin yhteydessä, niin ilmoittaudu tavalliseen tapaan tenttiin. Valinta välikokeen/tentin suhteen tehdään vasta koetilanteessa: kaikki vaihtoehdot ovat samalla paperilla. Periaatteena on ”parempi tulos jää voimaan”. Tämä mahdollisuus on voimassa vain 17.5.