

Tentti 17.5.2005

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Vain funktiolaskimet ovat sallittuja! Tenttiaika on neljä tuntia.

1. a) Millä muuttujan $x \in \mathbf{R}$ arvoilla sarja $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{10}{5+x^2}\right)^n$ suppenee ja mikä on tällöin sen summa?

- b) Osoita, että sarjan $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^5} = \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \dots$ summa s toteuttaa $s < 0,02$.

2. a) Määritä Taylorin sarjojen avulla

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}.$$

- b) Ratkaise alkuarvotekävä $y'' + 2y' = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 10$.

3. a) Selitä kuvion tai kaavojen avulla, miksi pisteen $(0, 1, 0)$ pallokoordinaatit ovat $(1, \pi/2, \pi/2)$.

- b) Funktiosta $f(x, y, z)$ tiedetään, että $f_x(0, 1, 0) = 1$, $f_y(0, 1, 0) = 2$ ja $f_z(0, 1, 0) = 3$. Pallokoordinaattien avulla määritellään uusi funktio

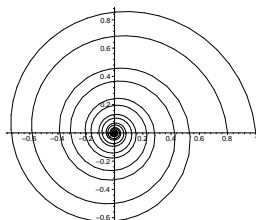
$$F(\rho, \varphi, \theta) = f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi).$$

Määritä osittaisderivaatat $F_\rho(1, \pi/2, \pi/2)$ ja $F_\theta(1, \pi/2, \pi/2)$.

4. Määritä funktion $f(x, y, z) = x + y + z$ pienin arvo paraboloidilla $z = x^2 - 2x + 2y^2 - 5y + 4$.

5. a) Määritä pinta-alan paikallinen suurennussuhde elliptisessä napakoordinaattimuunnoksessa $x = ar \cos \theta$, $y = br \sin \theta$. Tässä a, b ovat positiivisia vakioita.

- b) Napakoordinaattien avulla määritellyt spiraalit $r = e^{-\theta/10}$ ja $r = (4/5) \cdot e^{-\theta/10}$, missä $\theta \geq 0$, eivät leikkaa toisiaan (paitsi origossa rajalla $\theta \rightarrow \infty$). Määritä niiden väliin jäävän alueen pinta-ala.



Välikoetehtävät kääntöpuolella!