

Mat-1.1420 Matematiikan peruskurssi P2

3. välikoe 7.5.2007

Vain funktiolaskimet ovat sallittuja.

1. Määritä pinnan  $z = \sin x + \cos y$

a) kaltevuuskulma pisteessä  $(0, 0, 1)$ ;

b) suurin mahdollinen kaltevuuskulma.

Lisätieto: Kaltevuuskulmalla tarkoitetaan pinnan ylänormaalin ja vektorin  $\mathbf{k}$  välistä kulmaa.

2. Olkoot  $x, y, z > 0$  ja  $xyz = 1$ . Osoita, että

$$x + y + z \geq 3.$$

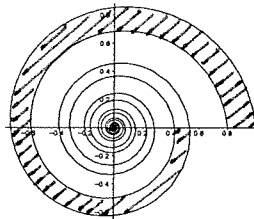
Vihje: Tutki lausekkeen  $x + y + z$  ääriarvoja ehdolla  $xyz = 1$ .

3. a) Olkoon

$$D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \leq 4\}.$$

Laske funktion  $f(x, y) = x + y$  integraali tasoalueen  $D$  yli.

b) Spiraalin kaaret  $r = e^{-\theta/10}$  ja  $r = (4/5) \cdot e^{-\theta/10}$ , missä  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , rajaavat erään tasoalueen (napakoordinaattien avulla). Määritä sen pinta-ala.



4. a)  $R$ -säteisen pallon  $B$  lämpötila  $T = T(\rho)$  laskee lineaarisesti keskipisteestä mitatun etäisyyden  $\rho$  funktiona arvosta 100 ( $\rho = 0$ ) arvoon 0 ( $\rho = R$ ). Määritä funktion  $T(\rho)$  lauseke ja laske pallon keskilämpötila

$$\frac{1}{V} \iiint_B T \, dV.$$

b) Määritä ohuen  $R$ -säteisen puolipallonkuoren

$$P = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$$

keskiön  $z$ -koordinaatti

$$\bar{z} = \frac{1}{A} \iint_P z \, dS.$$

Vihje: Oletetaan tunnetuksi, että  $V = \frac{4\pi}{3}R^3$  ja  $A = 2\pi R^2$ . Pallon pinnalla  $z = R \cos \varphi$ .

**Huom:** Vastaa kurssin kotisivulla olevaan kyselyyn! Aikaa vielä loppuviikko.