Teknillinen korkeakoulu
Matematiikka

Alestalo/Blåfield

Mat-1.1420 Matematiikan peruskurssi P2

2. välikoe 31.3.2009 klo 16–19.

Kaikki yo-kokeessa hyväksytyt laskimet ovat sallittuja.

1. Eräällä funktiolla $y\colon [0,\infty[\,\to [0,\infty[$ on seuraava ominaisuus: Funktion kuvaajan pisteeseen $(t, y(t))$ piirretty tangentti leikkaa x-akselin pisteessä $(-t, 0)$ kaikilla $t > 0$.
   a) Osoita, että funktio y toteuttaa differentiaaliyhtälön $y'(t) = y(t)/2t$ arvoilla $t > 0$.
   b) Ratkaise a-kohdan differentiaaliyhtälö, kun $y(1) = 1$.

2. Ratkaise alkuarvotehtävä $y'' + 8y' + 12y = 20e^{-x}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

3. a) Määritä alkuarvotehtävän $y' = \sqrt{x+y}$, $y(0) = 1$, ratkaisulle likiarvo $y(1)$ käyttämällä Eulerin menetelmää neljällä askeleella.
   b) Laske parametrisoidun tasokäyrän $x = t^2$, $y = 2t^3/3$, $t \in [0, 1]$, kaarenpituus.

4. a) Olkoon $R > 0$. Määritä ympyrän neljänneksen

$$C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = R^2,\ x \geq 0, y \geq 0\}$$

   keskiön x-koordinaatti

$$\bar{x} = \frac{1}{\ell} \int_C x\,ds.$$

   b) Laske vektorikentän $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ viivaintegraali pitkin a-kohdan käyrää pisteestä $(R, 0)$ pisteeseen $(0, R)$. Kyseessä on siis integraali

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C y\,dx - x\,dy.$$