Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Nevanlinna / Perkkiö

Mat-1.403 Matematiikan peruskurssi L3

3. Välikoe 12.12.2002

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. $\star$-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Kokeessa saa käyttää funktiolaskinta, ei muita apuvälineitä. Koeaika on 3h.

1. Tarkastellaan $\mathbb{R}^2$:ssa differentiaaliyhtälösysteemiä

$$\boldsymbol{x}' = (1 + \|\boldsymbol{x}\|^2)\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\,, \qquad \text{missä} \qquad \|\boldsymbol{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 \qquad \text{ja} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Määrää systeemin tasapainopisteet.
   (b) Todista, että $\|\boldsymbol{x}(t)\| = \|\boldsymbol{a}\|$, kun $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{a}$.
   (c) Määrittele käsitteet stabiili ja asymptoottisesti stabiili tasapainopiste.
   (d) Määrää systeemin tasapainopisteiden lajit.

2. Tarkastellaan $\mathbb{R}^2$:ssa differentiaaliyhtälösysteemiä $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, missä $\boldsymbol{f}$ on kuvaus

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad ; \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -|x_1|x_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Onko $\boldsymbol{f}$ Lipschitz-jatkuva koko $\mathbb{R}^2$:ssa? Perustele.
   (b) Ratkaise tehtävä $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ alkuarvolla

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad , \quad \text{missä} \quad a > 0.$$

   (c) Esitä Picard-Lindelöf -iteraatio alkuarvotehtävän ratkaisemiseksi ja laske kolme ensimmäistä iteraattia $\boldsymbol{x}^0$, $\boldsymbol{x}^1$ ja $\boldsymbol{x}^2$.

3. (a) Olkoot $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ja $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. Mitä tarkoitetaan sillä, että ohjaussysteemi

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{b}u_k$$

   on täydellisesti ohjattava?

   (b) Onko ohjaussysteemi $\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{b}u_k$ täydellisesti ohjattava, kun

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{ja} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} ?$$

Käännä! $\longrightarrow$

4. Tarkastellaan k-askelmenetelmää

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \boldsymbol{x}^{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{n+j}).$$

ja asetetaan

$$\rho(\zeta) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \zeta^j \qquad \text{ja} \qquad \sigma(\zeta) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j \zeta^j.$$

(a) Määrittele k-askelmenetelmän stabiilisuusalue S.

Annetaan kaksi k-askelmenetelmää polynomien $\rho^{(0)}(\zeta), \sigma^{(0)}(\zeta)$ ja $\rho^{(1)}(\zeta), \sigma^{(1)}(\zeta)$ avulla. Muodostetaan parametrin $\theta \in \mathbb{R}$ avulla uusi menetelmä asettamalla

$$\rho^{(\theta)} = (1-\theta)\rho^{(0)} + \theta\rho^{(1)}, \qquad \sigma^{(\theta)} = (1-\theta)\sigma^{(0)} + \theta\sigma^{(1)}.$$

(b) Perustele, miksi uuden menetelmän kertaluvulle $p^{(\theta)}$ pätee $p^{(\theta)} \geq \min\{p^{(0)}, p^{(1)}\}$, missä $p^{(0)}$ ja $p^{(1)}$ ovat edellä annettujen menetelmien kertaluvut.

(c) Erityisesti olkoon $\rho^{(0)}(\zeta) = \zeta^2 - \zeta$ ja $\rho^{(1)}(\zeta) = \zeta^2 - 1$. Määrää ne $\theta \in \mathbb{R}$, joilla $0 \in S_\theta$, kun S_θ:lla tarkoitetaan menetelmän $\rho^{(\theta)}, \sigma^{(\theta)}$ stabiilisuusaluetta.