Mat-1.404 Matematiikan peruskurssi L4 **Eirola**
Tentti 7.1.2003

Muista täyttää henkilötietosi *jokaiseen* vastauspaperiin.
Merkitse myös koulutusohjelma
(AUT, TFY, TIK, INF, TUO, EST, TLT, KON, KEM, MAK, PUU, ARK, MAR, MAA, RYK)
Laskimen käyttö ei ole sallittu. Tentti kestää neljä tuntia.

1. Ratkaise tehtävä
$$u_x(x,y) + u\,u_y(x,y) + u(x,y) = 0 \;,$$
alkuehdolla $u(0,y) = 2y$. Missä alueessa ratkaisu on olemassa?

2. Olkoon f jatkuva välillä $[0,1]$ ja $\varepsilon > 0$. Näytä, että on olemassa polynomi p siten, että $p(0) = f(0)$, $p(1) = f(1)$ ja $\int_0^1 |f(x) - p(x)|^{\frac{1}{2}}\, dx < \varepsilon$.

3. Olkoon $\Theta = \{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{x}| > 1 \}$. Etsi tehtävälle
$$\begin{cases} \Delta u(\boldsymbol{x}) = 0\,, & \boldsymbol{x} \in \Theta\,, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(\boldsymbol{x}) + u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})\,, & \boldsymbol{x} \in \partial\Theta\,, \\ u \text{ on rajoitettu,} & \end{cases}$$
sarjamuotoinen ratkaisu. Laske myös $\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} u(\boldsymbol{x})$.
Vihje: käytä napakoordinaatteja.

4. Kun tehtävä $u_t = \alpha\, u_{xx}$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $\alpha > 0$, on diskretoitu paikan suhteen askelpituudella h, saadaan tavallinen differentiaaliyhtälö
$$\boldsymbol{u}_h'(t) = \alpha\, \Delta_h\, \boldsymbol{u}_h(t) \;, \tag{0.1}$$
missä matriisin Δ_h ominaisarvot ovat välillä $(-\frac{4}{h^2}, 0)$. Sovelletaan tähän toisen kertaluvun Runge-Kutta -menetelmää, joka yhtälölle $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ voidaan kirjoittaa:
$$\begin{aligned} \boldsymbol{k}^1 &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^n) \\ \boldsymbol{k}^2 &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^n + \delta\, \boldsymbol{k}^1) \\ \boldsymbol{y}^{n+1} &= \boldsymbol{y}^n + \tfrac{\delta}{2}\,(\boldsymbol{k}^1 + \boldsymbol{k}^2) \;. \end{aligned}$$
Millä δ:n arvoilla näin saatu yhtälön (0.1) diskretointi on stabiili?

5. u toteuttaa:
$$\begin{cases} u_{tt} = 4\,u_{xx} \;, & x \in \mathbb{R},\; t > 0 \\ u(x,0) = e^{-x^2}\;,\; u_t(x,0) = \frac{1}{1+x^2} \;. & \end{cases}$$
Laske $u_t(1,2)$.

6. Olkoon $k(t,s) = ts\,(t+s)$ ja $f \in C[0,1]$. Millä μ:n arvoilla yhtälöllä
$$y(t) = \mu \int_0^1 k(t,s)\, y(s)\, ds + f(t)$$
on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu?

Kaavoja paperin kääntöpuolella $\longrightarrow$

Divergenssilause:

$$\int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma\,.$$

Green 1:

$$\int_\Omega (\nabla v \cdot \nabla u + v\,\Delta u)\, d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} v\,\tfrac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma\,.$$

Green 2:

$$\int_\Omega (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\, d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} (v\,\tfrac{\partial u}{\partial \nu} - u\,\tfrac{\partial v}{\partial \nu})\, d\sigma\,.$$

Green 3:

$$\int_\Omega \Delta u\, d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} \tfrac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma\,.$$

Fourier-sarja välillä $[-L, L]$:

$$f(x) \sim \tfrac{1}{2}\,a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k\, \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k\, \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right],$$

$$a_k = \tfrac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx\,, \quad b_k = \tfrac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx\,.$$

Fourier-muunnos:

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\, f(x)\, dx\,.$$

Fourier-käänteismuunnos:

$$f(x) \underset{2}{=} \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\, \widehat{f}(\omega)\, d\omega\,.$$

Laplacen operaattori napakoordinaateissa:

$$\Delta u = u_{rr} + \tfrac{1}{r}\, u_r + \tfrac{1}{r^2}\, u_{\theta\theta}\,.$$

Laplacen operaattori pallokoordinaateissa:

$$\Delta u = u_{rr} + \tfrac{2}{r}\, u_r + \tfrac{1}{r^2 \sin^2\phi}\, u_{\theta\theta} + \tfrac{1}{r^2}\, u_{\phi\phi} + \tfrac{\cot\phi}{r^2}\, u_\phi\,.$$

d-dimensioinen lämpöydin:

$$k(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\, e^{-|\boldsymbol{x}|^2/4t}.$$

D'Alembertin kaava:

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2}\,[\, f(x+ct) + f(x-ct)\,] + \tfrac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds\,.$$

Kirchhoffin kaava kahdessa dimensiossa:

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\boldsymbol{v}| \le 1} \frac{\frac{\partial}{\partial t}\,(t\, f(\boldsymbol{x} + ct\,\boldsymbol{v})) + t\, g(\boldsymbol{x} + ct\,\boldsymbol{v})}{\sqrt{1 - |\boldsymbol{v}|^2}}\, d\boldsymbol{v}\,.$$

Kirchhoffin kaava kolmessa dimensiossa:

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\boldsymbol{v}|=1} \left[\, \tfrac{\partial}{\partial t}\, \big(\, t\, f(\boldsymbol{x} + ct\,\boldsymbol{v})\,\big) + t\, g(\boldsymbol{x} + ct\,\boldsymbol{v})\,\right] d\sigma_{\boldsymbol{v}}\,.$$

Kelvinin muunnos: (dimensiossa d, a-säteisen pallon suhteen)

$$(Ku)(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{a}{|\boldsymbol{x}|}\right)^{d-2} u(\frac{a^2}{|\boldsymbol{x}|^2}\,\boldsymbol{x}).$$