Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu
Eirola / Palovaara

Mat-1.404 Matematiikan peruskurssi L4

3. välikoe 5.5.2003

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. ⋆-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Laskimen käyttö on kielletty.

1. Opetusmonisteessa johdettiin yksidimensioisen aaltoyhtälön

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x \in I, t > 0$$

diskretointi

$$\tfrac{1}{\delta^2}(u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}) = \tfrac{c^2}{h^2}(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k),$$

missä $u_j^k \approx u(jh, k\delta)$. Tarkasteltiin tapauksia

(a) $I = (0,1)$ reunaehdoilla $u(0,t) = u(1,t) = 0$,

(b) $I = \mathbb{R}$.

Molemmissa tapauksissa johdettiin diskretoinnin stabiilisuusehto $\delta \leq \frac{h}{c}$. Esitä jommassa kummassa tapauksessa, miten tämä saatiin. (a)-tapauksessa voit olettaa tiedettävän, että $\sigma(\Delta_h) \subset (-\frac{4}{h^2}, 0)$.

2. Näytä, että $v(\boldsymbol{x}) = e^{x_1}\cos(x_2), \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ on harmoninen. Ratkaise tämän avulla tehtävä

$$\begin{cases} \Delta u(\boldsymbol{x}) = 0, & |\boldsymbol{x}| > 2, \\ u(\boldsymbol{x}) = e^{x_1}\cos(x_2), & |\boldsymbol{x}| = 2, \\ u(\boldsymbol{x}) \quad \text{on rajoitettu joukossa} \quad |\boldsymbol{x}| > 2. \end{cases}$$

Laske myös $\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} u(\boldsymbol{x})$.

3. Olkoon $k(x,s) = 6(x-s)^2$. Näytä, että -1 on operaattorin

$$K : C[0,1] \to C[0,1], \quad Ky(x) = \int_0^1 k(x,s)y(s)\,ds$$

ominaisarvo. Mikä ehto funktion $f \in C[0,1]$ tulee toteuttaa, jotta yhtälöllä

$$y(x) + Ky(x) = f(x) \tag{*}$$

on olemassa ratkaisu? Valitse $\alpha \in \mathbb{R}$ siten, että $f(x) = x^2 + \alpha x$ toteuttaa ko. ehdon ja etsi tässä tapauksessa yhtälön (*) kaikki ratkaisut.

4. Kirjoita tehtävälle

$$\begin{cases} -u''(x) + xu(x) = 1, & x \in (0,1), \\ u(0) = 0,\ u'(1) = 1, \end{cases}$$

variaatioformulaatio. Ratkaise vastaava Galerkin-approksimaatio funktioiden $v_1(x) = x$, $v_2(x) = x^2$ virittämässä aliavaruudessa.

Käännä!

Divergenssilause:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{F} \, dx = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, d\sigma \, .$$

Green 1:

$$\int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla u + v \, \Delta u) \, dx = \int_{\partial\Omega} v \, \tfrac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma \, .$$

Green 2:

$$\int_{\Omega} (v \, \Delta u - u \, \Delta v) \, dx = \int_{\partial\Omega} (v \, \tfrac{\partial u}{\partial \nu} - u \, \tfrac{\partial v}{\partial \nu}) \, d\sigma \, .$$

Green 3:

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \tfrac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma \, .$$

Fourier-sarja välillä $[-L, L]$:

$$f(x) \sim \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \, \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \, \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right],$$

$$a_k = \tfrac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \, \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx \, , \quad b_k = \tfrac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \, \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx \, .$$

Fourier-muunnos ja -käänteismuunnos:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \, f(x) \, dx \, , \qquad f(x) \underset{2}{=} \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \, \hat{f}(\omega) \, d\omega \, .$$

Poissonin kaava kiekossa:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta - t)} f(t) \, dt \, .$$

Laplacen operaattori napakoordinaateissa:

$$\Delta u = u_{rr} + \tfrac{1}{r} \, u_r + \tfrac{1}{r^2} \, u_{\theta\theta} \, .$$

Laplacen operaattori pallokoordinaateissa:

$$\Delta u = u_{rr} + \tfrac{2}{r} \, u_r + \tfrac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \, u_{\theta\theta} + \tfrac{1}{r^2} \, u_{\phi\phi} + \tfrac{\cot \phi}{r^2} \, u_{\phi} \, .$$

Kelvin-muunnos d-dimensiossa:

$$v(\boldsymbol{y}) = \left(\frac{a}{|\boldsymbol{y}|} \right)^{d-2} u \left(\frac{a^2}{|\boldsymbol{y}|^2} \boldsymbol{y} \right) \, .$$

D'Alembertin kaava:

$$u(x, t) = \tfrac{1}{2} \left[f(x + ct) + f(x - ct) \right] + \tfrac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) \, ds \, .$$

Kirchhoffin kaava kahdessa dimensiossa:

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\boldsymbol{v}| \le 1} \frac{\tfrac{\partial}{\partial t} \left(t \, f(\boldsymbol{x} + ct \, \boldsymbol{v}) \right) + t \, g(\boldsymbol{x} + ct \, \boldsymbol{v})}{\sqrt{1 - |\boldsymbol{v}|^2}} \, d\boldsymbol{v} \, .$$

Kirchhoffin kaava kolmessa dimensiossa:

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\boldsymbol{v}| = 1} \left[\tfrac{\partial}{\partial t} \left(t \, f(\boldsymbol{x} + ct \, \boldsymbol{v}) \right) + t \, g(\boldsymbol{x} + ct \, \boldsymbol{v}) \right] d\sigma_{\boldsymbol{v}} \, .$$