Mat-1.404 Matematiikan peruskurssi L4 **Eirola**
Tentti 7.1.2004

Muista täyttää henkilötietosi *jokaiseen* vastauspaperiin.
Merkitse myös koulutusohjelma
(AUT, TFY, TIK, INF, TUO, EST, TLT, KON, KEM, MAK, PUU, ARK, MAR, MAA, RYK)
Laskimen käyttö ei ole sallittu. Tentti kestää neljä tuntia.

1. Tarkastellaan ominaisarvotehtävää
$$\begin{cases} a\,u''(x) + b\,u'(x) = \lambda\,u(x)\ , \\ u(0) = u'(1) = 0\ , \end{cases}$$
missä $a \neq 0$ ja b ovat vakioita. Etsi painofunktio w siten, että erisuuriin ominaisarvoihin liittyvät ominaisfunktiot ovat ortogonaaliset sisätulon
$$\langle u, v\rangle_w = \int_0^1 u(x)v(x)\,w(x)dx$$
suhteen. Vihje: kerro yhtälö sopivalla funktiolla niin, että se on itseadjungoitua muotoa.

2. Ratkaise tehtävä
$$\begin{cases} \big(u(x,y) + y\big)\,u_x(x,y) + u_y(x,y) = x\,, \\ u(x,0) = 0\ . \end{cases}$$

3. Olkoon u tehtävän
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0\ , & 0 \leq x, y \leq 1 \\ u(0,y) = u(x,0) = 0\,, & u(1,y) = y\,,\ u(x,1) = x^2\ , \end{cases}$$
ratkaisu. Näytä, että $0 \leq u(x,y) \leq x\,y\,, \quad 0 \leq x, y \leq 1\,.$

4. Olkoon u tehtävän
$$\begin{cases} u_t = u_{xx}\ , & x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0 \\ u(x,0) = 0\,,\ \text{kun}\ \ x < 0\,,\ u(x,0) = 1\,,\ \text{kun}\ \ x \geq 0\ , \end{cases}$$
ratkaisu. Näytä, että $u(x,t)$ on vakio pitkin käyriä $t = \alpha\,x^2\,,\ \alpha > 0\,,\ x \neq 0\,.$

5. Suorakaiteen $\Omega = (0,a) \times (0,b)$ muotoinen kalvo toteuttaa yhtälöt
$$\begin{cases} u_{tt}(\boldsymbol{x},t) = \Delta u(\boldsymbol{x},t)\,, & \boldsymbol{x} \in \Omega\,,\, t \in \mathbb{R}\,, \\ u(\boldsymbol{x},t) = 0\,, & \boldsymbol{x} \in \partial\Omega\,. \end{cases}$$
Määrää a ja b $(a > b)$ siten, että kaksi alinta värähtelytaajuutta ($f_j = \frac{\omega_j}{2\pi}$) ovat $\frac{\sqrt{13}}{12}$ ja $\frac{\sqrt{17}}{12}$.

6. Olkoon Ω sileäreunainen rajoitettu alue ja u tehtävän
$$\begin{cases} \Delta u(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})\,, & \boldsymbol{x} \in \Omega\,, \\ u(\boldsymbol{x}) = 0\,, & \boldsymbol{x} \in \partial\Omega\,, \end{cases}$$
ratkaisu. Olkoon $V = \big\{ v \in L_2(\Omega) \,\big|\, \nabla v \in L_2(\Omega)\,,\, v(\boldsymbol{x}) = 0\,,\, \boldsymbol{x} \in \partial\Omega \big\}$. Kirjoita tehtävälle variaatioformulaatio. Olkoon V_h V:n äärellisdimensioinen aliavaruus ja $u_h \in V_h$ tätä vastaava Galerkin–approksimaatio. Näytä, että u_h on u:n paras approksimaatio V_h:ssa normin $\|v\|_V = \big(\int_\Omega |\nabla v(\boldsymbol{x})|^2\, d\boldsymbol{x} \big)^{1/2}$ mielessä.

Kaavoja paperin kääntöpuolella ⟶

Divergenssilause:

$$\int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{F}\, dx = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma\,.$$

Green 1:

$$\int_\Omega (\nabla v \cdot \nabla u + v\, \Delta u)\, dx = \int_{\partial\Omega} v\, \tfrac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma\,.$$

Green 2:

$$\int_\Omega (v\, \Delta u - u\, \Delta v)\, dx = \int_{\partial\Omega} (v\, \tfrac{\partial u}{\partial \nu} - u\, \tfrac{\partial v}{\partial \nu})\, d\sigma\,.$$

Green 3:

$$\int_\Omega \Delta u\, dx = \int_{\partial\Omega} \tfrac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma\,.$$

Fourier-sarja välillä $[-L, L]$:

$$f(x) \sim \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k\, \cos\left(\tfrac{k\pi x}{L}\right) + b_k\, \sin\left(\tfrac{k\pi x}{L}\right) \right],$$

$$a_k = \tfrac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, \cos\left(\tfrac{k\pi x}{L}\right) dx\,, \quad b_k = \tfrac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, \sin\left(\tfrac{k\pi x}{L}\right) dx\,.$$

Fourier-muunnos:

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\, f(x)\, dx\,.$$

Fourier-käänteismuunnos:

$$f(x) \underset{2}{=} \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\, \widehat{f}(\omega)\, d\omega\,.$$

Hyödyllinen kaava:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\omega y - \beta\omega^2}\, d\omega = \sqrt{\tfrac{\pi}{\beta}}\, e^{-y^2/4\beta}\,, \qquad y \in \mathbb{R}\,,\ \beta > 0\,.$$

Laplacen operaattori napakoordinaateissa:

$$\Delta u = u_{rr} + \tfrac{1}{r}\, u_r + \tfrac{1}{r^2}\, u_{\theta\theta}\,.$$

Laplacen operaattori pallokoordinaateissa:

$$\Delta u = u_{rr} + \tfrac{2}{r}\, u_r + \tfrac{1}{r^2 \sin^2\phi}\, u_{\theta\theta} + \tfrac{1}{r^2}\, u_{\phi\phi} + \tfrac{\cot\phi}{r^2}\, u_\phi\,.$$

d-dimensioinen lämpöydin:

$$k(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\, e^{-|\boldsymbol{x}|^2/4t}.$$