Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu
Eirola / Parviainen

Mat-1.404 Matematiikan peruskurssi L4

3. välikoe 26.4.2004

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Laskimen käyttö on kielletty.

1. Paikkadiskretoitu aaltoyhtälö voidaan kirjoittaa 1. kertaluvun systeemiksi

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{\Delta}_h & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix},$$

missä $\boldsymbol{\Delta}_h$:sta tiedetään, että se on symmetrinen ja sen ominaisarvot ovat välillä $(-\frac{4}{h^2}, 0)$. Tarkastellaan tämän aikadiskretointia

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}^{k+1} = \boldsymbol{u}^k + \delta \boldsymbol{v}^k \\ \boldsymbol{v}^{k+1} = \boldsymbol{v}^k + \delta \boldsymbol{\Delta}_h \boldsymbol{u}^{k+1} \end{cases}$$

Millä δ:n arvoilla menetelmä on stabiili?
Vihje: Kirjoita menetelmä muotoon

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}^{k+1} \\ \boldsymbol{v}^{k+1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{M} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}^k \\ \boldsymbol{v}^k \end{bmatrix}$$

ja etsi $\boldsymbol{M}$:n ominaisvektorit muodossa $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \alpha\boldsymbol{\eta} \end{bmatrix}$, missä $\boldsymbol{\eta}$ on $\boldsymbol{\Delta}_h$:n ominaisvektori.

2. Ratkaise tehtävä

$$\begin{cases} \Delta u(\boldsymbol{x}) = 0, & |\boldsymbol{x}| > 2,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \\ u(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2, & \text{kun } |\boldsymbol{x}| = 2 \\ \lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} u(\boldsymbol{x}) = 0 & . \end{cases}$$

Vihje: Totea ensin, että $v(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ on harmoninen.

3. Olkoon $k(t,s) = ts(t+s)$ ja f jatkuva. Millä μ:n arvoilla yhtälöllä

$$y(t) = \mu \int_0^1 k(t,s) y(s)\, ds + f(t)$$

on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu?

4. Olkoon Ω normaali rajoitettu alue ja B_D osa sen reunaa. Tarkastellaan minimointitehtävää

$$\min \qquad E(u) = \int_\Omega [\, \tfrac{p(\boldsymbol{x})}{2}\, |\nabla u(\boldsymbol{x})|^2 + \tfrac{q(\boldsymbol{x})}{2}\, u(\boldsymbol{x})^2 - g(\boldsymbol{x})\, u(\boldsymbol{x}) \,]\, d\boldsymbol{x}\ , \quad \text{kun} \quad u \in V\ ,$$

missä $V = \{v \in C^1(\Omega)\,|\, v(\boldsymbol{x}) = 0,\ \boldsymbol{x} \in B_D\}$ ja p, q ja g ovat jatkuvia sekä $p(\boldsymbol{x}) > 0$, $q(\boldsymbol{x}) \ge 0$, $\boldsymbol{x} \in \Omega$. Etsi tämän variaatiomuoto. Olkoon $V_h = \operatorname{span}\{ v_1, \ldots, v_n \} \subset V$. Millaisesta yhtälöryhmästä vastaava Ritz-Galerkin approksimaatio u_h saadaan laskettua? Näytä myös, että u_h minimoi E:n aliavaruudessa V_h.

Käännä!

Divergenssilause:

$$\int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{F}\, dx = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma\,.$$

Green 1:

$$\int_\Omega (\nabla v \cdot \nabla u + v\,\Delta u)\, dx = \int_{\partial\Omega} v\, \tfrac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma\,.$$

Green 2:

$$\int_\Omega (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\, dx = \int_{\partial\Omega} (v\, \tfrac{\partial u}{\partial \nu} - u\, \tfrac{\partial v}{\partial \nu})\, d\sigma\,.$$

Green 3:

$$\int_\Omega \Delta u\, dx = \int_{\partial\Omega} \tfrac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma\,.$$

Fourier-sarja välillä $[-L, L]$:

$$f(x) \sim \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k\, \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k\, \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right],$$

$$a_k = \tfrac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx\,, \quad b_k = \tfrac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx\,.$$

Fourier-muunnos ja -käänteismuunnos:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\, f(x)\, dx\,, \qquad f(x) \underset{2}{=} \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\, \hat{f}(\omega)\, d\omega\,.$$

Poissonin kaava kiekossa:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta - t)} f(t)\, dt\,.$$

Laplacen operaattori napakoordinaateissa:

$$\Delta u = u_{rr} + \tfrac{1}{r}\, u_r + \tfrac{1}{r^2}\, u_{\theta\theta}\,.$$

Laplacen operaattori pallokoordinaateissa:

$$\Delta u = u_{rr} + \tfrac{2}{r}\, u_r + \tfrac{1}{r^2 \sin^2 \phi}\, u_{\theta\theta} + \tfrac{1}{r^2}\, u_{\phi\phi} + \tfrac{\cot \phi}{r^2}\, u_\phi\,.$$

Kelvin-muunnos d-dimensiossa:

$$v(\boldsymbol{y}) = \left(\frac{a}{|\boldsymbol{y}|}\right)^{d-2} u\left(\frac{a^2}{|\boldsymbol{y}|^2}\boldsymbol{y}\right)\,.$$

D'Alembertin kaava:

$$u(x, t) = \tfrac{1}{2}\,[\, f(x + ct) + f(x - ct)\,] + \tfrac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds\,.$$

Kirchhoffin kaava kahdessa dimensiossa:

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\boldsymbol{v}| \le 1} \frac{\tfrac{\partial}{\partial t}\,(t\, f(\boldsymbol{x} + ct\,\boldsymbol{v})) + t\, g(\boldsymbol{x} + ct\,\boldsymbol{v})}{\sqrt{1 - |\boldsymbol{v}|^2}}\, d\boldsymbol{v}\,.$$

Kirchhoffin kaava kolmessa dimensiossa:

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\boldsymbol{v}| = 1} \left[\, \tfrac{\partial}{\partial t}\, \big(\, t\, f(\boldsymbol{x} + ct\,\boldsymbol{v})\,\big) + t\, g(\boldsymbol{x} + ct\,\boldsymbol{v})\,\right] d\sigma_{\boldsymbol{v}}\,.$$