Mat-1.404 Matematiikan peruskurssi L4 **Eirola**
Tentti 14.5.2004

Muista täyttää henkilötietosi *jokaiseen* vastauspaperiin.
Merkitse myös koulutusohjelma
(AUT, TFY, TIK, INF, TUO, EST, TLT, KON, KEM, MAK, PUU, ARK, MAR, MAA, RYK)
Laskimen käyttö ei ole sallittu. Tentti kestää neljä tuntia.

1. Ratkaise tehtävä: $u_x + xy\,u_y + u^2 = 0$, alkuehdolla $u(1,y) = y$. Piirrä se alkuarvokäyrän sisältävä alue, jossa ratkaisu on voimassa.

2. Olkoon $B = \left\{ \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{n\times n} \,\middle|\, \|\boldsymbol{X}\|_2 < 1 \right\}$ ja $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C} \in B$. Näytä, että yhtälöllä
$$\boldsymbol{X} = \tfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{X}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X} + \boldsymbol{C} \right)$$
on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu $\boldsymbol{X} \in B$.

3. Olkoon $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ ja u tehtävän
$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = -1 \,, & (x,y) \in \Omega \,, \\ u(x,y) = 0 \,, & (x,y) \in \partial\Omega \,, \end{cases}$$
ratkaisu. Näytä, että
$$x(1-x)y(1-y) \le u(x,y) \le \tfrac{1}{4}\left[x(1-x) + y(1-y) \right] \,, \quad (x,y) \in \Omega \,.$$

4. Olkoon $\Omega = (0,a) \times (0,b)$. Etsi tehtävälle
$$\begin{cases} u_t = \Delta u \,, & (x,y) \in \Omega \,,\ t > 0, \\ u(0,y,t) = u(a,y,t) = 0 \,, & \\ u_y(x,0,t) = u_y(x,b,t) = 0 \,, & \\ u(x,y,0) = f(x,y) & \end{cases}$$
sarjamuotoinen ratkaisu. Mikä on vastaava Greenin funktio?

5. Ratkaise tehtävä
$$\begin{cases} \Delta u(\boldsymbol{x}) = 0 \,, & |\boldsymbol{x}| > a \,,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \,, \\ u(\boldsymbol{x}) = x_1^2 \,, & |\boldsymbol{x}| = a (x,y) \,, \\ u \ \text{on rajoitettu.} & \end{cases}$$
Vihje: etsi aluksi tehtävän
$$\begin{cases} \Delta w(\boldsymbol{x}) = 0 \,, & |\boldsymbol{x}| < a \,, \\ w(\boldsymbol{x}) = x_1^2 \,, & |\boldsymbol{x}| = a (x,y) \,, \end{cases}$$
ratkaisu muodossa
$$w(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta) \right] \,.$$

6. Olkoon $p(x) = \sin(x)$ ja tarkastellaan tehtävää
$$\begin{cases} -\big(p(x)\,u'(x)\big)' = 1 \,, & 0 < x < \pi \,, \\ u(0) = u(\pi) = 0 \,. & \end{cases}$$
Kirjoita tälle variaatioformulaatio ja ratkaise vastaava Galerkin-approksimaatio, kun kantafunktioina ovat $v_j(x) = \sin(jx)$, $j = 1,2,3$. Vihje:
$$\cos(\alpha)\,\cos(\beta) = \tfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) \right] \,,$$
$$\sin(\alpha)\,\cos(\beta) = \tfrac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) \right] \,.$$

Kaavoja paperin kääntöpuolella ⟶

Divergenssilause:

$$\int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{F}\, dx = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma\,.$$

Green 1:

$$\int_\Omega (\nabla v \cdot \nabla u + v\, \Delta u)\, dx = \int_{\partial\Omega} v\, \tfrac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma\,.$$

Green 2:

$$\int_\Omega (v\, \Delta u - u\, \Delta v)\, dx = \int_{\partial\Omega} (v\, \tfrac{\partial u}{\partial \nu} - u\, \tfrac{\partial v}{\partial \nu})\, d\sigma\,.$$

Green 3:

$$\int_\Omega \Delta u\, dx = \int_{\partial\Omega} \tfrac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma\,.$$

Fourier-sarja välillä $[-L, L]$:

$$f(x) \sim \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k\, \cos\left(\tfrac{k\pi x}{L}\right) + b_k\, \sin\left(\tfrac{k\pi x}{L}\right)\right],$$

$$a_k = \tfrac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, \cos\left(\tfrac{k\pi x}{L}\right) dx\,, \quad b_k = \tfrac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, \sin\left(\tfrac{k\pi x}{L}\right) dx\,.$$

Fourier-muunnos:

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\, f(x)\, dx\,.$$

Fourier-käänteismuunnos:

$$f(x) \underset{2}{=} \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\, \widehat{f}(\omega)\, d\omega\,.$$

Hyödyllinen kaava:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\omega y - \beta\omega^2}\, d\omega = \sqrt{\tfrac{\pi}{\beta}}\, e^{-y^2/4\beta}\,, \qquad y \in \mathbb{R}\,,\ \beta > 0\,.$$

Laplacen operaattori napakoordinaateissa:

$$\Delta u = u_{rr} + \tfrac{1}{r}\, u_r + \tfrac{1}{r^2}\, u_{\theta\theta}\,.$$

Laplacen operaattori pallokoordinaateissa:

$$\Delta u = u_{rr} + \tfrac{2}{r}\, u_r + \tfrac{1}{r^2 \sin^2\phi}\, u_{\theta\theta} + \tfrac{1}{r^2}\, u_{\phi\phi} + \tfrac{\cot\phi}{r^2}\, u_\phi\,.$$

d-dimensioinen lämpöydin:

$$k(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\, e^{-|\boldsymbol{x}|^2/4t}.$$

Kelvinin muunnos: (dimensiossa d, a-säteisen pallon suhteen)

$$(Ku)(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{a}{|\boldsymbol{x}|}\right)^{d-2} u\left(\frac{a^2}{|\boldsymbol{x}|^2}\, \boldsymbol{x}\right).$$