Teknillinen Korkeakoulu, Matematiikka — Gripenberg/Kuusi

Mat-1.442 Matematiikan peruskurssi P2

Tentti 20.11.2000

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Funktiolaskin on sallittu apuväline tässä kokeessa!

1.

(a) Funktiosta f tiedetään, että $f'(1) = 1 \pm 0{,}005$ ja $f''(1) = 2 \pm 0{,}02$. Määritä derivaattaa käyttäen likimääräinen virheraja käyrän $y = f(x)$ kaarevuussäteelle pisteessä $x = 1$. Kaarevuussäde saadaan kaavasta $\rho = (1 + (f'(x))^2)^{3/2}/|f''(x)|$.

(b) Oletetaan, että funktio $u(t,x)$ toteuttaa osittaisdifferentiaaliyhtälön $u_t(t,x) = u_{xx}(t,x)$ kun $t > 0$ ja $x \in \mathbb{R}$. Määritä vakiot α ja β siten, että funktio $v(t,x) = u(\alpha t, x + \beta t)$ toteuttaa osittaisdifferentiaaliyhtälön $v_t(t,x) = 2v_{xx}(t,x) - v_x(t,x)$.

2. Hae funktion $x + 2y$ pienin arvo käyrällä $2x^2 - y^2 + 14 = 0$, $y > 0$ käyttäen Lagrangen kertojaa.

3. Olkoon $\mathbf{f}(x,y,z) = (z+y)\mathbf{i} + (x-y)\mathbf{j} + (x+z)\mathbf{k}$.

(a) Laske viiva-integraali

$$\int_\gamma \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x},$$

missä γ on jana pisteestä $(0,1,2)$ pisteeseen $(2,1,0)$.

(b) Määritä funktion $\mathbf{f}$ divergenssi $\nabla \cdot \mathbf{f}$ ja roottori $\nabla \times \mathbf{f}$.

4. Ratkaise differentiaaliyhtälösysteemi

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 6 & -11 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t), \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. Ratkaise likimääräisesti differentiaaliyhtälö $y'(x) = \sin(x + y(x)^2)$, $y(0) = 0$ Runge-Kuttan (4. kertaluvun) menetelmällä laskemalla yksi askel askelpituudella $h = 0{,}2$.