Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssit K3/P3

Apiola/Maasalo

2. välikoe 10.11. 2003

Muistathan kirjoittaa nimesi ja muut vaadittavat jokaiseen vastauspaperiin!

Sallittu: funktiolaskin

1. Olkoon annettu $\mathbb{R}^4$:n vektorit $\mathbf{v}_1 = [3, -1, 2, -1]^T$ ja $\mathbf{v}_2 = [-5, 9, -9, 3]^T$.

   6 (a) Muodosta niiden virittämälle aliavaruudelle ortogonaalinen kanta $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

   (b) Esitä vektori $\mathbf{v} = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ kannan $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ avulla. Käytä hyväksesi ortogonaalisuutta. (Jos lasket "vanhanaikaisesti", yhtälösysteemin ratkaisten, joudut tekemään enemmän työtä ja kärsit yhden pisteen "metodivähennyksen".)

2. Määritä Laplace-muunnos funktioille

   3-4 (a) $f(t) = \cosh(at)\sin(bt)$, (b) $f(t) = \begin{cases} t, \text{kun } 0 \le t \le 1 \\ 1, \text{kun } t > 1. \end{cases}$

3. Ratkaise Laplace-muunnosta käyttäen alkuarvotehtävä

4-6

$$y'' + 3y' + 2y = \begin{cases} 1, \text{kun } 0 \le t < 1 \\ 0, \text{kun } t \ge 1 \end{cases}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

4. Tarkastelun kohteena olkoon systeemi $y' = Ay$, missä $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ d & 0 \end{bmatrix}$

   4-6 Olkoon (a) $d > 0$ (voit ottaa $d = 4$) ja (b) $d < 0$ (voit ottaa $d = -4$).

   Muodosta kummassakin tapauksessa yleinen ratkaisu, hahmottele faasitasokuva suuntanuolineen ja ilmoita O:n tyyppi ja stabiilisuus.

   Huomaa, että erityisesti (b)-kohdassa voit käyttää suuntanuolikysymyksen ratkaisuun itseänsä differentiaaliyhtälösysteemiä.

Kaava- ja ohjekokoelma

Tarkoitus ei ole, että kaikkia kaavoja pitäisi käyttää tässä kokeessa. Olkoon tämä "pikkuMAOL".

Vektorinormeja:
$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$ ("taksikuskin normi")
$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = (\sum_{k=1}^n |x_k|^2)^{1/2}$ ("euklidinen normi")
$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \le k \le n} |x_k|$

Matriisinormi: $\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$ Jos vektorinormina on $\|.\|_1$ tai $\|.\|_\infty$, saadaan helpot lausekkeet:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|, \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Laplace-muunnokset

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $\mathcal{L}f = F$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ **Merk.** $u(t) = H(t)$=yksikköaskelfunktio .
$(\mathcal{L}f')(s) = sF(s) - f(0)$, $(\mathcal{L}f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$, $\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s)$, $\mathcal{L}(f * g) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g), (f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = (g * f)(t)$

$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$, $\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$, $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$

Laplace-taulukko

$f(t)$	t^k	e^{at}	$\cosh at$	$\sinh at$	$\cos \omega t$	$\sin \omega t$
$F(s)$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

Osamurtokehitelmät

$\int_a^b u'v = \Big/_a^b uv + \int_a^b uv'$

Olk. $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, missä $deg(P) < deg(Q)$
1) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s - a$, otetaan kehitelmään termi $\frac{A}{s-a}$.
2) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s^2 + bs + c$, tulee kehitelmään termi $\frac{Bs+C}{s^2+bs+c}$, jos halutaan operoida reaalisilla kertoimilla.

KÄÄNNÄ

3) Jos em. muotoa olevat termit esiintyvät korkeammassa potenssissa, sanokaamme r, otetaan termit $\frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(s-a)^r}$ ja vastaavasti toisessa tapauksessa termit $\frac{B_1 s+C_1}{s^2+bs+c} + \ldots + \frac{B_r s+C_r}{(s^2+bs+c)^r}$

Sekalaisia kaavoja

$\cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$, $\sinh t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$.

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$.
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$.

$y' = Ay$, kompleksiset ominaisarvot

Yleinen (reaalinen) ratkaisu on muotoa
$y(t) = [\mathbf{u}|\mathbf{v}]e^{\alpha t}\begin{bmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$, missä $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ liittyvät luonnollisella tavalla ominaisvektoreihin ja α ja β yhtä luonnollisella tavalla ominaisarvoihin.