

## 3. välikoe 14.12. 2004

Muistathan kirjoittaa nimesi ja muut vaadittavat jokaiseen vastauspaperiin!

## Sallittu: funktiolaskin

1. Sovela *Eulerin menetelmää* alkuarvoehtävään  $y'' = ty' - 3y$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -3$ .

Suorita ensin 2 askelta arvolla  $h = 0.1$  ja sitten yksi askel arvolla  $h = 0.2$ . Vertaa kumpakin tulosta tarkkaan (4:llä numerolla) arvoon  $y(0.2) = 0.3482$  ja toea, että virhe käyttäytyy (kutakuinkin) Eulerin menetelmälle luonteenomaisesti.

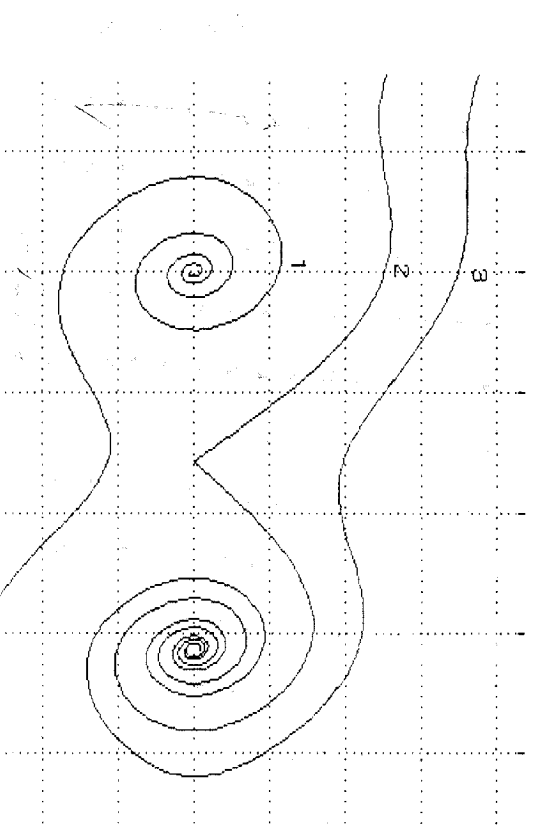
Alkuunpääsyohje: Muunna ensin systeemiksi.

2. Tarkastellaan vaimennettua heiluria ja oletetaan, että  $k = \frac{g}{c} = 1$  ja vaimennusvakio  $c = 1$ .

Heilurin liike noudattaa tällöin yhtälöä:

$$\Theta'' + \Theta' + \sin \Theta = 0.$$

- (a) Muunna yhtälö ensimmäisen kertaluvun systeemiksi (Merkitse uusia "riippuvia muuttujia" vaikka  $y_1, y_2$ .)  
 (b) Määritä systeemin kriittiset pisteet ja lineaarisoitu systeemi niissä.  
 (c) Määritä lineaarisoitujen luonne ja stabiilisuus. (Muista, että toisen asteen yhtälön ratkaisukaavakin on keksitty.)  
 (d) Kuvassa 1 on vaaka-akselina  $y_1 = \Theta$  ja pystyakselina  $y_2 = \Theta'$ . Seuraava kuvassa olevaa kolmea trajektoria lähtien kulkemaan ajassa eteenpäin pisteistä 1, 2, 3 ( $y_1 = \Theta = 0$ ). Kerro, mitä kelpo heilurillemme tapahtun kullakin polulla erityisesti kunkin kuvassa näkyvän (kolmen) kriittisen pisteen läheisyydessä.



Kuva 1: Tehtävän 2 kuva

3. Piirrä funktion  $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 5 \\ 0, & 5 < x < 10 \end{cases}$

pariton laajennus  $20 -$  jaksoksi välillä  $[-20, 20]$  ja muodosta tämän Fourier-sarja.

Huom! Laskun yksityiskohden täytyy olla näkyvillä, väkinäinen päätyminen oikeaan tulokseen ei tuota pisteitä.

Kirjoita sarjan 4:n ensimmäisen nollasta poikkeavan termin summa näkyviin (kertoimet sievennetynä tarkkoina arvoina).

Ositainen vastaus:  $b_n = -2 \frac{\cos(\frac{n\pi}{5}) - 1}{n\pi}$

4. Neljänmuotoisen levyän pinnat on lämpöeristetty reunoja lukuunottamatta. Olkoon neljän sivu  $a = 10$  pituusyksikköä. Levyän sivureunat olkoot  $0^\circ$ :ssa, yläreunalla olkoon lämpötila  $f(x) = \begin{cases} 100, & 0 < x < 5 \\ 0, & 5 < x < 10 \end{cases}$  ja alareunalla  $g(x) = 85 \sin \frac{\pi x}{5}$ .  
 Määritä levyän tasapainolämpötilafunktio  $u(x, y)$ .

# Kaavoja, ohjeita

## Fourier-sarja

$2L$ -jaksoisen funktion  $f$  Fourier-sarja:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

## Laplacen yhtälö

Suorakulmioalue:  $[0, a] \times [0, b]$ , sivut ja alareuna 0:ssä, yläreuna-arvo:  $f(x)$

Ratkaisu:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right), \quad A_n = \frac{2}{a \sinh \frac{n\pi b}{a}} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx$$

Suorakulmioalue:  $[0, a] \times [0, b]$ , sivut ja yläreuna 0:ssä, alareuna-arvo:  $g(x)$

Ratkaisu:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh\left(\frac{n\pi}{a}(y-b)\right), \quad B_n = -\frac{2}{a \sinh \frac{n\pi b}{a}} \int_0^a g(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx$$